Correction application satellites

b. Quelle est la seule trajectoire qui peut correspondre au satellite géostationnaire ? Justifier la réponse.

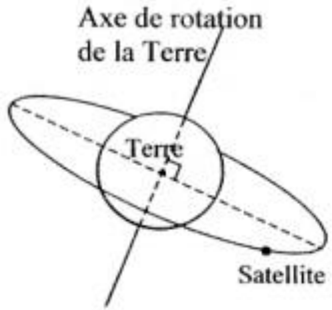


Figure 1

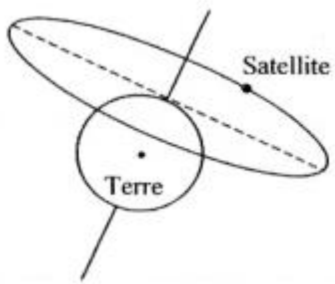


Figure 2

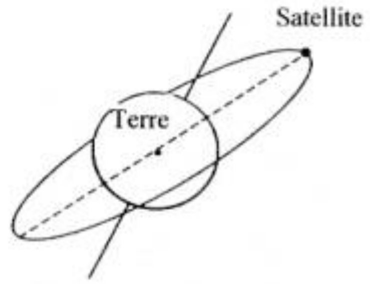


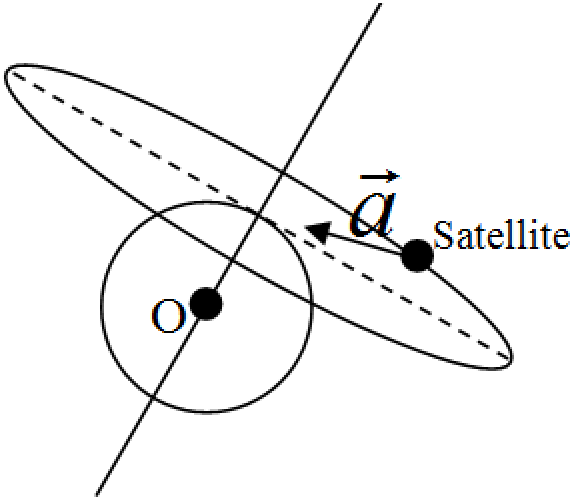
Figure 3

Satellite

La **figure 2 est incompatible** avec la seconde loi de Newton: Le vecteur accélération est dans le plan contenant l'orbite du satellite.

Or d'après la 2nde loi de Newton, le vecteur possède le même sens et la même direction que le vecteur ;

 doit avoir pour direction la droite (OS), ce qui n'est pas



autre justification possible: Rappel mathématique un cercle est une ellipse particulière dont les foyers sont confondus et situés au centre du cercle.

D'après la 1ère loi de Kepler (voir son énoncé au 3.1), le point O devrait être au centre de l'orbite du satellite. Cette loi n'est donc pas respectée sur cette figure 2.

La figure 1 est la seule trajectoire qui puisse correspondre au satellite géostationnaire. Le plan contenant l'orbite du satellite est le plan équatorial. Ainsi le satellite peut rester à la verticale d'un même lieu si sa période de révolution est égale à la période de rotation de la Terre.

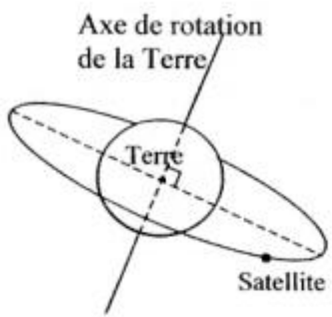


Figure 1

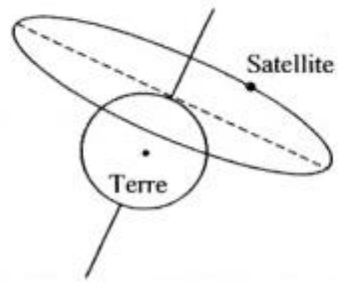


Figure 2

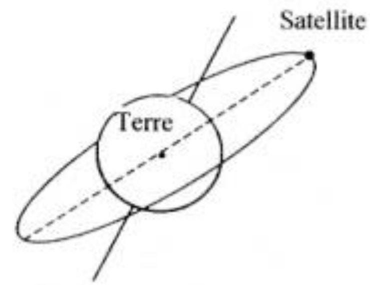


Figure 3

Calcul de l'altitude h

Le satellite, de masse m, est étudié dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.
La trajectoire du satellite est un cercle de rayon : $R_T + h$.
Le repère d'étude est le repère de Frénet $(S,\vec{n},\vec{\tau})$ d'origine le satellite S et de vecteur unitaires $\vec{n}$ et $\vec{\tau}$.

Le satellite est soumis à la force gravitationnelle exercée par la Terre : $\vec{F}_{T/S} = G.\dfrac{m.M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{n}$.

La deuxième loi de Newton donne : $\vec{F}_{T/S} = m.\overline{a_S}$ soit : $G.\dfrac{m.M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{n} = m.\overline{a_S}$

Donc : $\overline{a_S} = \dfrac{G.M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{n}$

Dans le repère de Frénet, l'accélération d'un objet en mouvement circulaire s'écrit :
$\overline{a_S} = \dfrac{v^2}{R_T+h}.\vec{n} + \dfrac{dv}{dt}.\vec{\tau}$

En égalant les deux expressions précédentes de l'accélération, il vient :

$$\frac{G.M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{n} = \frac{v^2}{R_T+h}.\vec{n} + \frac{dv}{dt}.\vec{\tau}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{n} : \quad \dfrac{v^2}{R_T+h} = \dfrac{G.M_T}{(R_T+h)^2} \\[2ex] \text{sur } \vec{\tau} : \dfrac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$

Sur $\vec{\tau}$ on a : $\dfrac{dv}{dt} = 0$ alors **v = Cte** : le mouvement du satellite est bien **uniforme**.

$$m\frac{v^2}{(R+h)} = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

Or pour être géostationnaire, le satellite doit parcourir son orbite $2\pi(R+h)$ pendant la période T = 24 heures ce qui nous donne la vitesse moyenne v. Ainsi, on obtient

$$R+h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

puis

$$h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R$$

On prend pour l'application numérique :

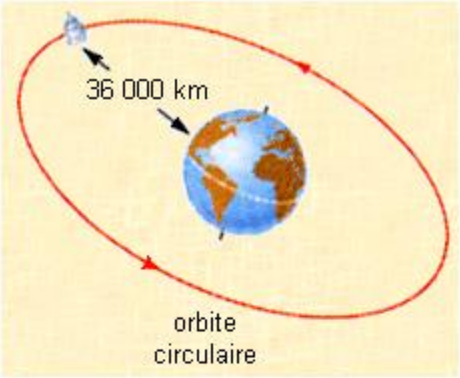
- $T = 24 \times 3600 = 86\,400$ s
- $R = 6{,}378.10^6$ m
- $M = 5{,}98.10^{24}$ kg
- $G = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

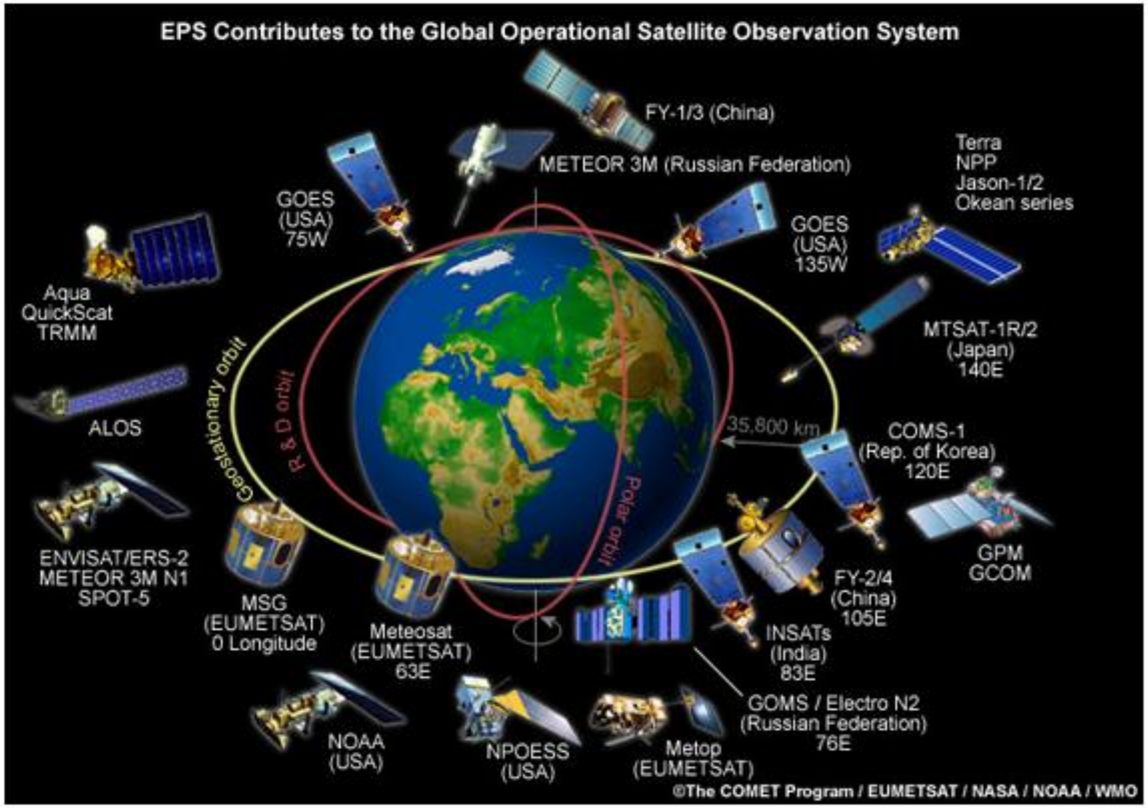
ce qui donne h = 35 870 km.

$$\mathbf{h} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M_T}}{4\ \pi^2}} - \mathbf{R_T}$$

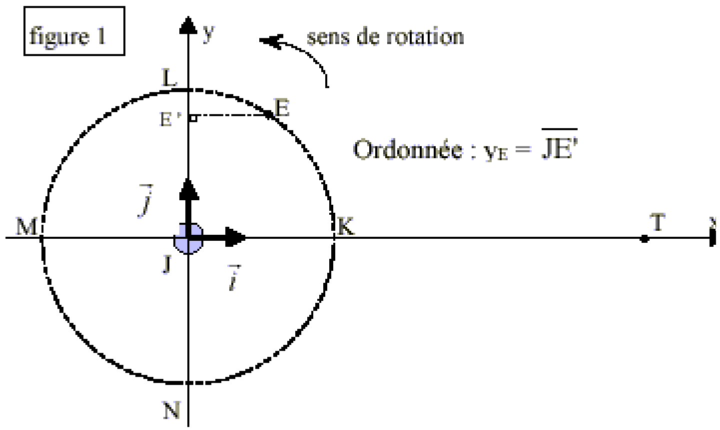
$$\mathbf{h} \approx \sqrt[3]{\frac{86164^2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 6{,}0 \times 10^{24}}{4\ \pi^2}} - 6400 \times 10^3$$

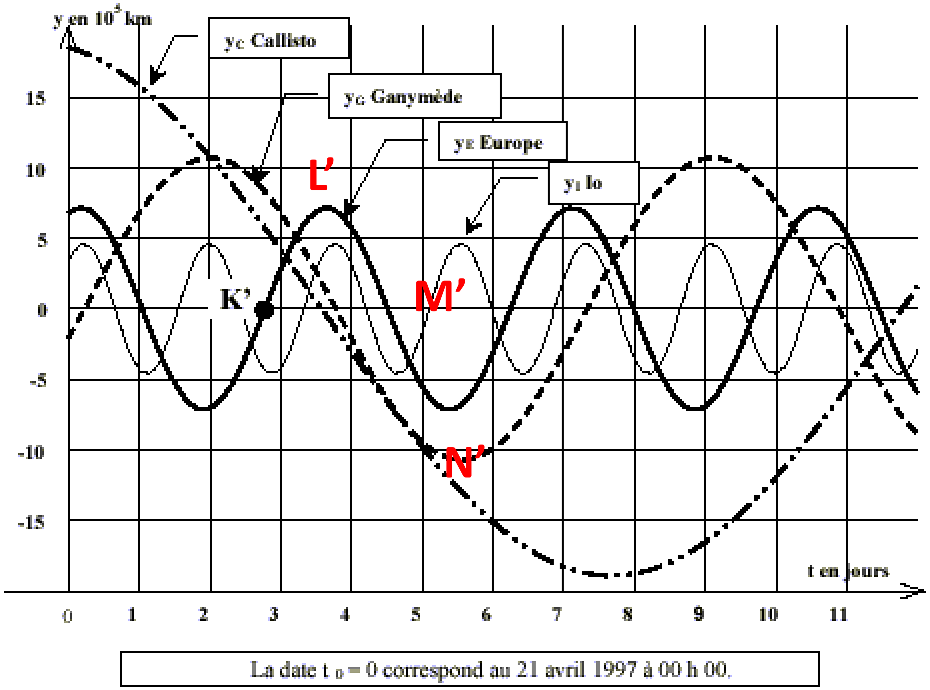
$$\mathbf{h} \approx 3{,}58 \times 10^7 \ \mathrm{m} \ \approx 35\ 800 \ \mathrm{km}$$


36 000 km
orbite
circulaire


EPS Contributes to the Global Operational Satellite Observation System
FY-1/3 (China)
METEOR 3M (Russian Federation)
Terra
NPP
Jason-1/2
Okean series
GOES
(USA)
75W
GOES
(USA)
135W
Aqua
QuickScat
TRMM
MTSAT-1R/2
(Japan)
140E
ALOS
Geostationary orbit
R & D orbit
35,800 km
COMS-1
(Rep. of Korea)
120E
Polar orbit
ENVISAT/ERS-2
METEOR 3M N1
SPOT-5
GPM
GCOM
MSG
(EUMETSAT)
0 Longitude
Meteosat
(EUMETSAT)
63E
FY-2/4
(China)
105E
INSATs
(India)
83E
GOMS / Electro N2
(Russian Federation)
76E
NOAA
(USA)
NPOESS
(USA)
Metop
(EUMETSAT)
©The COMET Program / EUMETSAT / NASA / NOAA / WMO

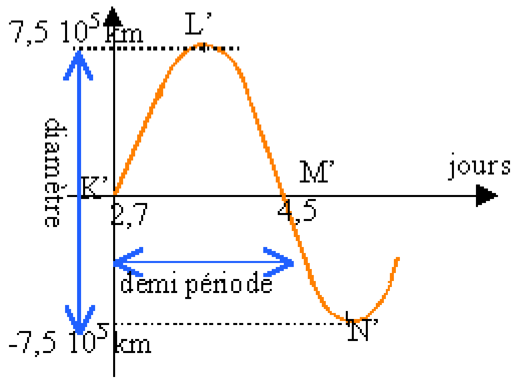
Masse de Jupiter





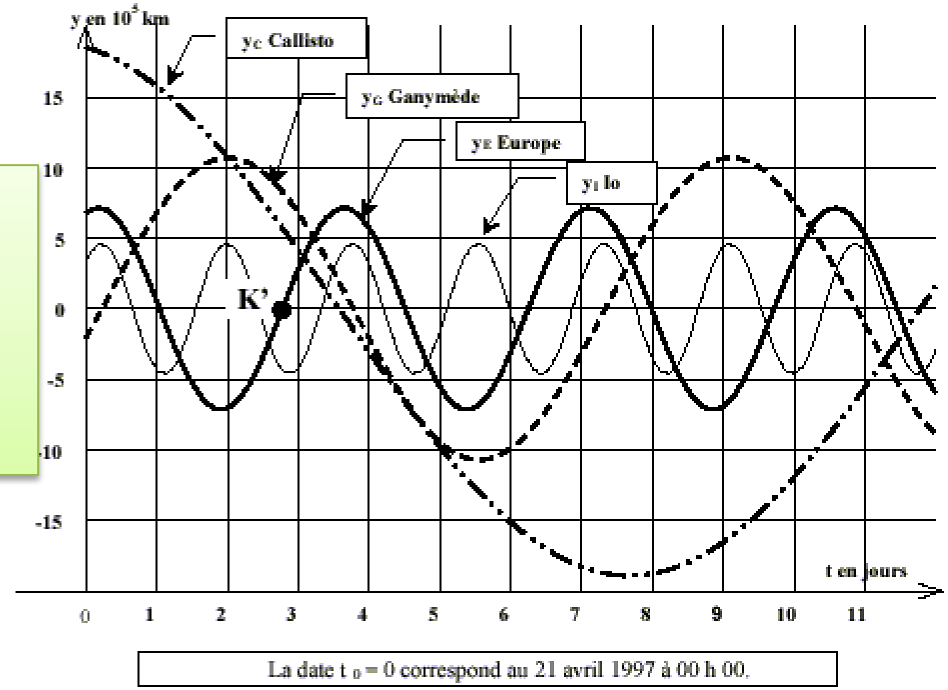
Sur la figure 1 ci-dessus, on a noté K, L, M et N les positions particulières d'Europe quand sa trajectoire coupe les axes Jx et Jy. Sur le document 1 fourni en annexe 1, on a placé un point K' qui correspond à un passage du satellite Europe au point K de sa trajectoire. Placer sur le document 1, les points L', M' et N' qui correspondent respectivement aux passages successifs du satellite Europe par les points L, M et N

Sur cette courbe yE = f(t), quel couple de points permet de déterminer la demi-période de révolution du satellite Europe. Donner sa période de révolution en jours.



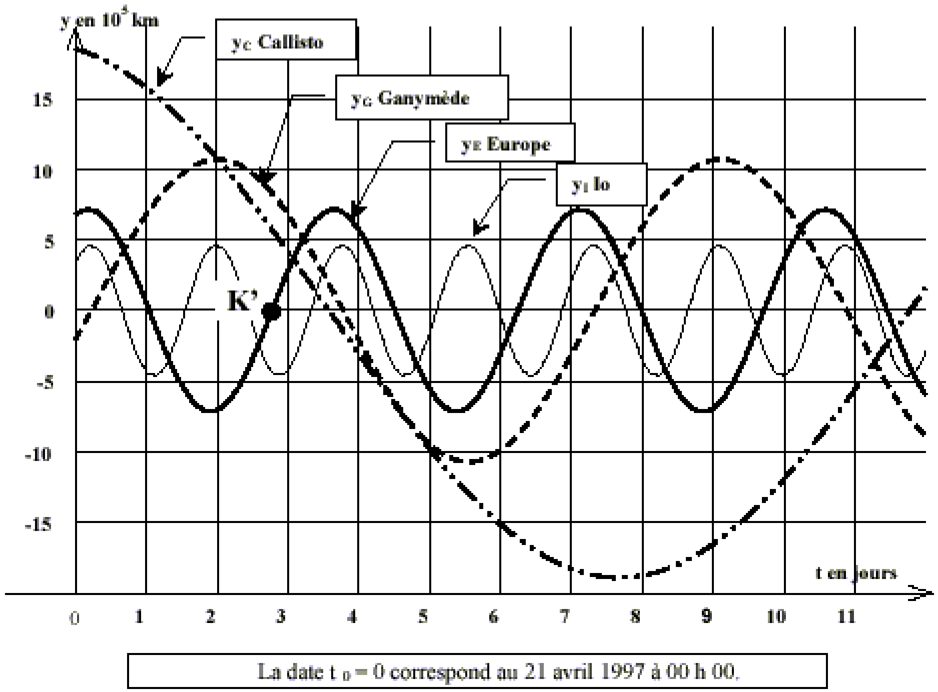
le couple (K' M')permet de déterminer la demi période soit environ 1,8 jours.
période voisine de 3,6 jours

De même, quel couple de points permet de déterminer le diamètre de la trajectoire du satellite Europe. Donner ce diamètre en km.



le couple (L' N')permet de déterminer le diamètre soit environ $1,5\ 10^6$ km.

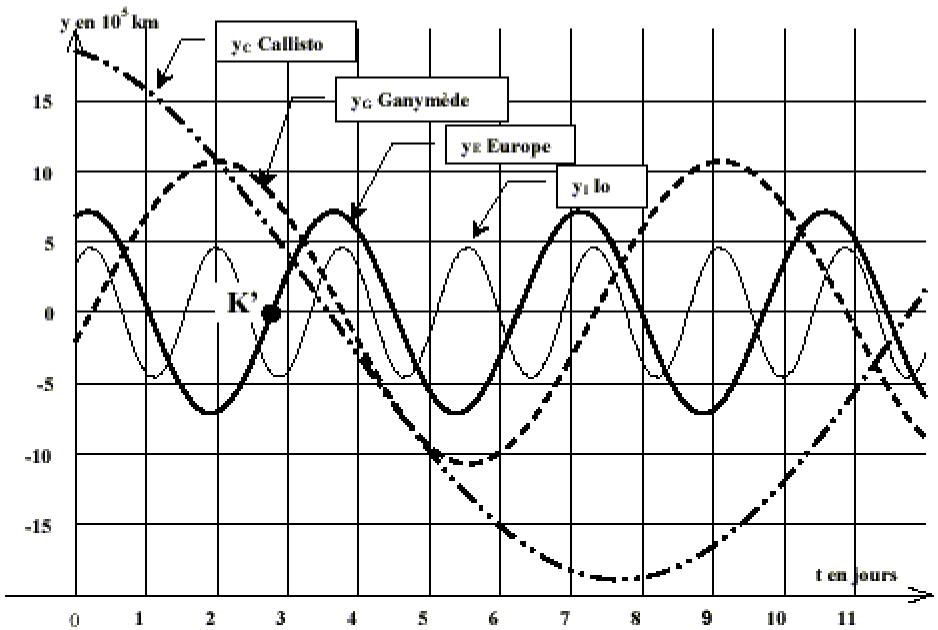
Identifier le satellite le plus proche de Jupiter puis le satellite ayant la plus grande période de révolution.



Io est le plus proche de Jupiter; Callisto est celui qui a la plus grande période

A partir des données remplir le tableau

Satellite de Jupiter	Période de révolution du satellite autour de Jupiter (s)	Distance du satellite à Jupiter (m)
Io	$1{,}53 \times 10^5$	$4{,}22 \times 10^8$
Europe	$3{,}07 \times 10^5$	$6{,}71 \times 10^8$
Ganymède	$6{,}19 \times 10^5$	$1{,}07 \times 10^9$
Callisto	$1{,}44 \times 10^6$	$1{,}88 \times 10^9$



La date $t_0 = 0$ correspond au 21 avril 1997 à 00 h 00.

1 jour = 24*3600 s

1 km = 10^3 m

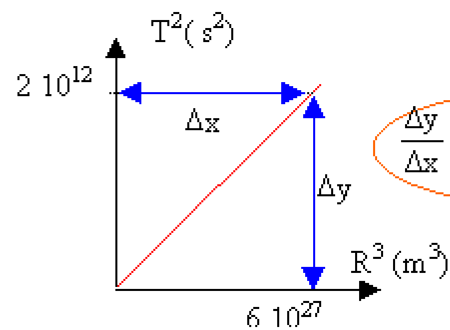
Proposer une méthode graphique

Représenter sur papier millimétré le graphe donnant les variation de T^2 en fonction de R^3. Conclure

	io	Europe	Ganymède	Callisto
T(en secondes)	$1{,}53\ 10^5$	$3{,}07\ 10^5$	$6{,}18\ 10^5$	$1{,}44\ 10^6$
R(en m)	$4{,}22\ 10^8$	$6{,}71\ 10^8$	$1{,}07\ 10^9$	$1{,}883\ 10^9$
T^2 en s^2	$2{,}34\ 10^{10}$	$9{,}42\ 10^{10}$	$3{,}81\ 10^{11}$	$2{,}07\ 10^{12}$
R^3 en m^3	$7{,}51\ 10^{25}$	$3\ 10^{26}$	$1{,}22\ 10^{27}$	$6{,}64\ 10^{27}$
T^2 / R^3	$3{,}1\ 10^{-16}$	$3{,}14\ 10^{-16}$	$3{,}12\ 10^{-16}$	$3{,}2\ 10^{-16}$

T^2 / R^3 est à peu près constant égal à : $3{,}15\ 10^{-16}$.

La 3ème loi de Kepler est bien vérifiée.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,10^{12}}{6\,10^{27}} = 3{,}2\,10^{-16}$$

__masse de Jupiter__ :

$T^2 / R^3 = 4\pi^2/(GM)$ 3ème loi de Képler.

$M = 4\pi^2 / (\ 3{,}15\ 10^{-16} * 6{,}67\ 10^{-11}) = 1{,}87\ 10^{27}$ kg.