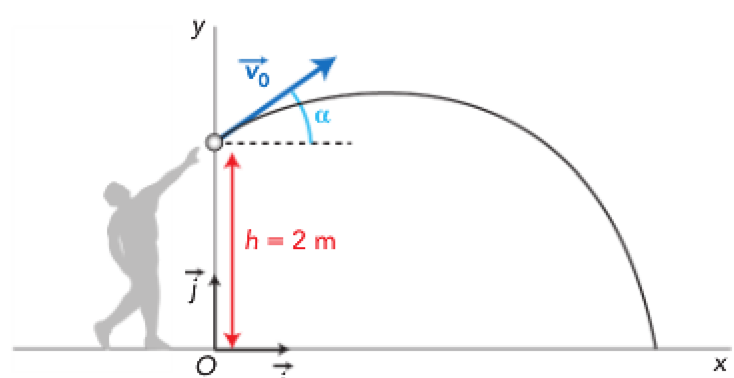
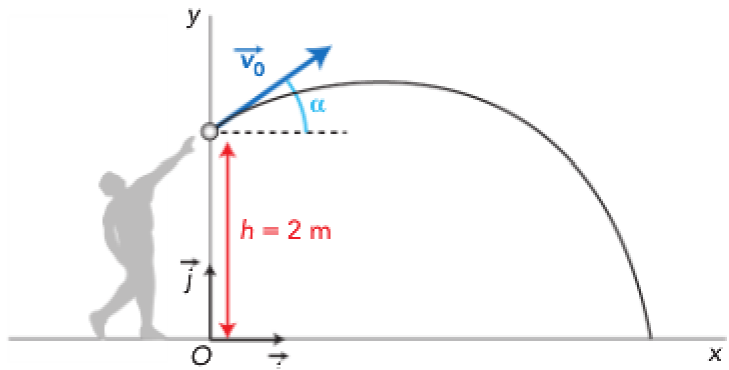
CORRECTION HACHETTE CHAMPS PESANTEUR

9 Étudier un lancer de poids

Un athlète lance un poids. À la date $t = 0$, correspondant à l'instant du lancer, le poids se trouve à une hauteur h de 2,00 m au-dessus du sol et part avec une vitesse initiale, de valeur égale à 14,0 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, faisant un angle α de 35,0° par rapport à l'horizontale. Le poids est assimilé à un point matériel. Le champ de pesanteur terrestre est considéré uniforme.





On propose trois expressions littérales possibles de la trajectoire du poids dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ associé au référentiel terrestre supposé galiléen. L'objectif de cet exercice est de déterminer l'expression littérale correcte parmi les suivantes :

(A) $$y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x$$

(B) $$y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x + h$$

(C) $$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t$$

1. a. Rappeler la définition de la trajectoire d'un point matériel en mouvement dans un référentiel.
b. Quelle expression peut-on alors éliminer ?

2. a. Quelles sont les coordonnées du vecteur position initiale ?
b. En déduire la proposition correcte.

1. a. La trajectoire d'un point est l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours de son mouvement. Son équation est du type $y = f(x)$.

2. a. À $t = 0$, le poids P est à une hauteur $y = h$:

$$\overrightarrow{OP_0} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

b. On élimine l'équation (A) où l'ordonnée de P à $t = 0$ est nulle.

(B) est l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \cdot \tan \alpha + h$$

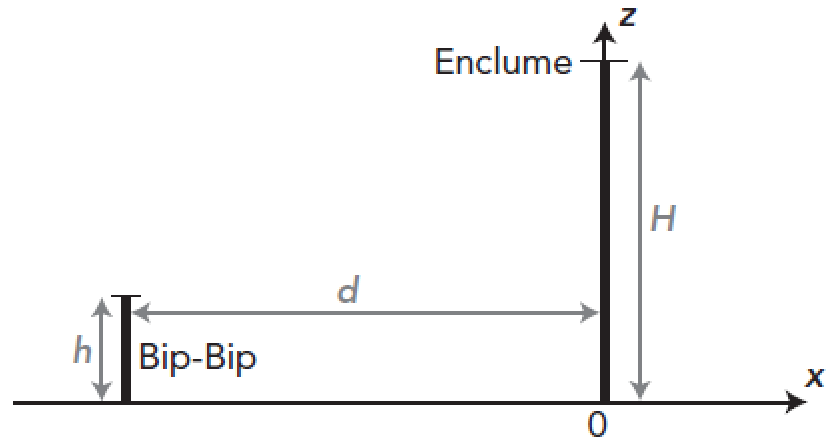
16 Manquera, manquera pas ?

COMPÉTENCES Raisonner ; calculer.

Vil Coyote tend un piège à Bip-Bip : juché sur un promontoire rocheux à une hauteur H au-dessus d'une route rectiligne horizontale, il attend sa proie, prêt à faire basculer une enclume sur la tête de Bip-Bip. L'enclume commence sa chute verticale sans vitesse initiale au moment où Bip-Bip, qui se déplace à une vitesse de valeur v_0 constante le long de la route, se trouve à une distance d du point de chute. On suppose que les lois de la physique s'appliquent dans l'univers Looney Tunes.

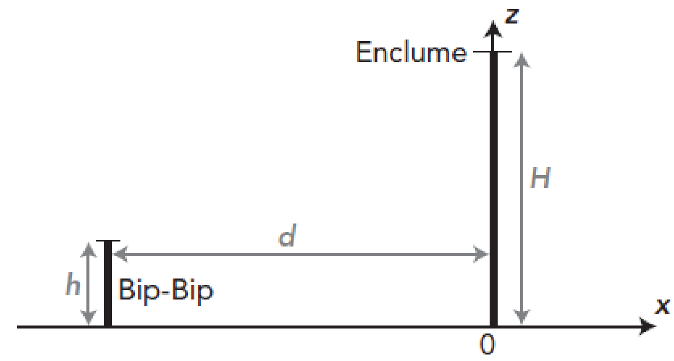
1. Schématiser la situation à la date initiale.

1. Schématisation de la situation à la date initiale :



2. a. Établir les équations horaires du mouvement de l'enclume dans un référentiel terrestre supposé galiléen.
b. Comment qualifier ce mouvement ?

Schématisation de la situation à la date initiale :



2. a. Système {enclume} assimilée à son centre de gravité G. On choisit l'origine du repère au niveau du sol et on oriente l'axe vertical (Oz) vers le haut. L'enclume est soumise à son poids et, en négligeant toute autre force, la deuxième loi de Newton conduit, dans ce référentiel galiléen, à $\vec{a} = \vec{g}$.

Une première intégration donne :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \cdot t \end{pmatrix}$$

Une seconde intégration donne :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{g}{2} \cdot t^2 + H \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur position sont les équations horaires du mouvement.

b. Il s'agit d'un mouvement rectiligne, uniformément accéléré.

3. Quelle est la durée de chute de l'enclume ?

4. Comment qualifier le mouvement de Bip-Bip dans ce même référentiel ?

5. Montrer que Vil Coyote a lâché l'enclume trop tard pour assommer Bip-Bip.

Données : H = 30,0 m ; taille de Bip-Bip h = 1,20 m ; d = 50,0 m ; $m_{enclume}$ = 20 kg ; v_0 = 110 km·h^{-1} ; le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme et vaut 9,81 m·s^{-2}.

3. La chute est terminée à t_f lorsque $z(t_f) = 0$, soit :

$$0 = -\frac{g}{2} \cdot t_f^2 + H$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

L'application numérique donne :

$$t_f = \sqrt{\frac{2 \times 30{,}0}{9{,}81}} = 2{,}47 \text{ s.}$$

4. Comment qualifier le mouvement de Bip-Bip dans ce même référentiel ?

5. Montrer que Vil Coyote a lâché l'enclume trop tard pour assommer Bip-Bip.

Données : $H = 30{,}0$ m ; taille de Bip-Bip $h = 1{,}20$ m ; $d = 50{,}0$ m ; $m_{enclume} = 20$ kg ; $v_0 = 110\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme et vaut $9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

4. Dans le référentiel terrestre choisi, le mouvement de Bip-Bip est rectiligne uniforme. Sa vitesse v_0 est constante.

5. Soit t_B la date à laquelle l'enclume atteint la cote $z = h$ (c'est la cote correspondant à la hauteur de Bip-Bip) :

$$t_B = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

$$t_B = \sqrt{\frac{2 \times 28{,}8}{9{,}81}} = 2{,}42\ \text{s}.$$

Or, le temps mis par Bip-Bip pour atteindre l'endroit où tombera l'enclume est :

$$t_E = \frac{d}{v_0},\ \text{avec}\quad v_0 = 30{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$t_E = \frac{50{,}0}{30{,}6} = 1{,}64\ \text{s}.$$

$t_B > t_E$, donc Bip-Bip est passé au point de chute avant que l'enclume ne l'atteigne. Il ne se fait pas assommer.

24 Bac Le hockey sur gazon

COMPÉTENCES **Mobiliser ses connaissances ; raisonner.**

Pratiqué depuis l'Antiquité sous le nom de « jeu de crosse », le hockey sur gazon est un sport olympique depuis 1908.
Il se pratique sur une pelouse naturelle ou synthétique, de dimensions quasi identiques à celles d'un terrain de football.
Chaque joueur propulse la balle avec une crosse, l'objectif étant d'envoyer la balle dans le but adverse.

Dans cet exercice, on étudie le mouvement du centre de la balle de masse m, dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

À la date $t = 0$ s, la balle quitte la crosse au point B avec le vecteur vitesse $\vec{v_B}$ contenu dans le plan (xOz) comme le montre le schéma.
On néglige toutes les actions dues à l'air. Le mouvement du centre de la balle est étudié dans le champ de pesanteur supposé uniforme.
Le système d'axes utilisé est représenté sur le schéma ci-dessous : l'axe (Ox) est horizontal dirigé vers la droite, l'axe (Oz) est vertical et dirigé vers le haut.
L'origine des axes est située à la verticale du point B telle que $OB = h = 0{,}40$ m.

1. Exprimer les coordonnées v_{B_x} et v_{B_z} du vecteur vitesse $\vec{v_B}$ du centre G de la balle à l'instant $t = 0$ s, en fonction de v_B et de α.

2. Quelles sont les coordonnées x_B et z_B du vecteur position $\vec{OG}$ de la balle au point B ?

3. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'on obtient les équations suivantes :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{cases} v_x = v_B \cdot \cos\alpha \\ v_z = -g\cdot t + v_B \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

4. Montrer que la valeur v_S de la vitesse du point G au sommet S de la trajectoire est :

$$v_S = 12{,}1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

5. Montrer que les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ du centre G de la balle sont les suivantes :

$$\vec{OG}\begin{cases} x = v_B \cdot \cos\alpha \cdot t \\ z = -\dfrac{1}{2}\, g \cdot t^2 + v_B \cdot \sin\alpha \cdot t + h \end{cases}$$

6. En déduire l'équation de la trajectoire du point G.

1. Le mouvement de la balle est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen associé au repère $(O;\, x,\, z)$.
Coordonnées du vecteur $\vec{v_B}$ à $t = 0$ s :

$$\begin{pmatrix} v_{Bx} = v_B \cdot \cos \alpha \\ v_{Bz} = v_B \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

2. Coordonnées du vecteur position à $t = 0$ s :

$$\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x_B = 0 \\ z_B = h \end{pmatrix}$$

3. La balle n'est soumise qu'à son poids, donc d'après la deuxième loi de Newton :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Par projection dans le repère $(O;x,\, z)$, on obtient :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix}$$

Par intégration, étant donné les conditions initiales :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x = v_B \cdot \cos \alpha \\ v_z = -g \cdot t + v_B \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$v_z = -g \cdot t + v_B \cdot \sin \alpha$$

4. Quel que soit le point de la trajectoire, les coordonnées du vecteur vitesse en ce point sont :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = v_B \cdot \cos \alpha \\ v_z = -g \cdot t + v_B \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

La coordonnée horizontale du vecteur vitesse, $v_x = v_B \cdot \cos \alpha$, est une constante qui ne dépend pas de la position du point G.

Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse de la balle est horizontal, donc $v_{Sz} = 0$.

La norme du vecteur vitesse au point S est alors :

$$v_S = \sqrt{v_{x_S}^2 + v_{y_S}^2} = v_{x_S} = v_B \cdot \cos \alpha$$

Ainsi $v_S = v_B \cdot \cos \alpha = 14{,}0 \times \cos(30)$

$v_S = 12{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5. $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$

Par intégration, et en tenant compte des conditions initiales $x(0) = x_B = 0$ et $z(0) = z_B = h$, on obtient :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = v_B \cdot \cos\alpha \cdot t + x_B \\ z = -\dfrac{1}{2} g \cdot t^2 + v_B \cdot \sin\alpha \cdot t + z_B \end{pmatrix}$$

soit : $$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = v_B \cdot \cos\alpha \cdot t \\ z = -\dfrac{1}{2} g \cdot t^2 + v_B \cdot \sin\alpha \cdot t + h \end{pmatrix}$$

6. Équation de la trajectoire : on isole le temps « t » de la première équation que l'on reporte dans l'expression de z :

$$t = \frac{x}{v_B \cdot \cos\alpha}$$

donc :

$$z = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_B \cdot \cos\alpha}\right)^2 + (v_B \cdot \sin\alpha) \cdot \frac{x}{v_B \cdot \cos\alpha} + h$$

Finalement :

$$z = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_B \cdot \cos\alpha}\right)^2 + \tan\alpha \cdot x + h$$

C'est une équation de parabole.

7. Pour que le but soit marqué, il faut, pour $x = d$, que $0 \leqslant z(d) \leqslant L$.

Pour $x = d = 15$ m :

$$z(d) = -\frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{d}{v_B \cdot \cos\alpha}\right)^2 + \tan\alpha \cdot d + h$$

$$z(d) = -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times \left(\frac{15{,}0}{14{,}0 \times \cos 30}\right)^2 + \tan 30 \times 15{,}0 + 0{,}40$$

$$z(d) = 1{,}6 \text{ m.}$$

On a donc bien $0 \leqslant z(d) \leqslant L$, avec $L = 2{,}14$m.

Le but est marqué.